الموضوع [11] الأخيرة   التاريخ 15/12/2015

المحاكمات المنطقية

تعريف المحاكمة المنطقية هي عبارة عن مجموعة منتهية من العبارات المنطقية $p_1, p_2, \ldots p_n$ تسمى المعطيات أو الفرضيات بالإضافة إلى عبارة q تسمى النتيجة أو المحصلة وتمثل المحاكمة المنطقية على النحو التالي:

$$\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \\ \hline q \end{array} \quad \therefore \text{ إذاً}$$

وهذه تكافئ الشكل العباراتي $p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \Rightarrow q$
تكون المحاكمة المنطقية صحيحة إذا كان الشكل العباراتي السابق استلزام

ملاحظة: إن المحاكمة المنطقية صحيحة إذا تحقق الشرط: إذا كانت كل p_i ; $i=1,2,\ldots,n$ صحيحة فإن النتيجة q صحيحة أيضاً أي أن المحاكمة صحيحة إذا كانت استلزاماً أما إذا لم يتوفر هذا الشرط فإننا نقول أن المحاكمة غير صحيحة

* ملاحظة: إذا كانت إحدى المعطيات $p_1, p_2, \ldots p_n$ على الأقل خاطئة فإن الفرضية $p_1 \wedge p_2 \ldots p_n$ خاطئة وبالتالي فإن المحاكمة تكون صحيحة مهما كانت قيمة الحقيقة لـ q.

* وإذا كانت المعطيات صحيحة كلها واحد في هذه الحالة المحاكمة المنطقية تتوقف على النتيجة وهنا نقول أن هذا الشرط هو شرط حرج

مثال: أثبت أن المحاكمة التالية صحيحة:
إذا نال أحمد الدرجة 80 على الأقل في المنطق الرياضي فإنه سيتخرج هذا العام، وقد نال أحمد الدرجة 95 في

إذاً أحمد سيتخرج هذا العام.
الحل: (بعدها نكون النتيجة)

لنفرض أن العبارة p هي أن أحمد نال درجات 80 على الأقل
والعبارة q هي أن أحمد سيتخرج هذا العام
الفرض المعطيات. $p \Rightarrow q$

$$\frac{p}{\therefore q}$$

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \land p$	q	$① \Rightarrow ②$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	1
0	0	1	0	0	1

(صحيح) الاستدلال

إذاً المحاكمة صحيحة

مثال ②: إذا كان الحد الثابت في المعادلة $ax^2+bx+c=0$ يساوي الصفر فإن $x=0$ حلاً لها ولكن $x=0$ ليس حلاً لها إذن الحد الثابت في المعادلة لا يساوي الصفر.

الحل:
الفرض: لنفرض أن p: الحد الثابت في المعادلة يساوي الصفر
q: هو $x=0$ حلاً لها.
المعطيات: $p \Rightarrow q$ ، $\sim q$
النتيجة $\sim p$

① $p \Rightarrow q$
② $\sim q$
$\therefore \sim p$

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim q$	$(p \Rightarrow q) \land \sim q$	$\sim p$	$① \Rightarrow ②$
1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1

إذاً الاستدلال وبالتالي المحاكمة المنطقية صحيحة.

مثال (3): اثبت أن المحاكمة المنطقية صحيحة
العدد الصحيح m إما عدد زوجي أو عدد فردي
ولكن m ليس زوجياً إذاً m عدد فردي.

الحل:

لنفرض أن p: هي كون العدد الصحيح m زوجي
q: هي كون العدد الصحيح فردي

المعطيات: $\sim p$, $p \vee q$

النتيجة q

شكل المحاكمة

$$\begin{array}{l} p \vee q \quad (1) \\ \underline{\sim p} \\ \therefore q \quad (2) \end{array}$$

p	q	p∨q	∼p	(p∨q)∧∼p	(1)⇒2
1	1	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	0	1

سطر حرج

إذاً المحاكمة المنطقية صحيحة

مثال:

بيّن إذا كانت المحاكمة المنطقية صحيحة
إذا كانت أسئلة الامتحان طويلة فإن الامتحان صعب
ولكن الامتحان صعب إذن أسئلة الامتحان طويلة

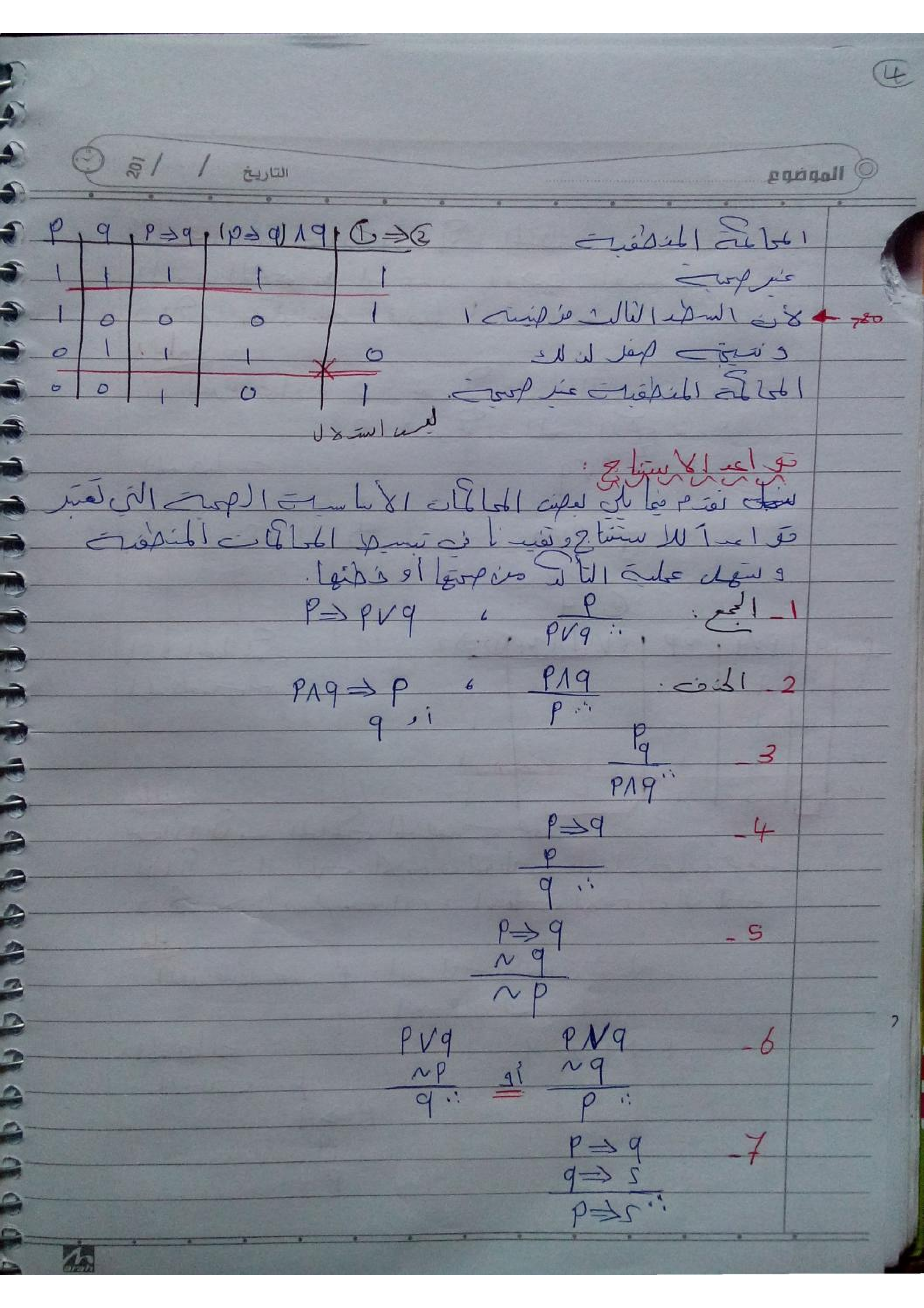
الحل:

الفرضيات: p: أسئلة الامتحان طويلة
q: الامتحان صعب

المعطيات $p \Rightarrow q$, q

النتيجة p

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \underline{q} \\ \therefore p \end{array}$$



الموضوع — التاريخ / / 201

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge q$	① ⇒ ②
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	0
0	0	1	0	1

ليس استدلال

المحاكمة المنطقية
غير صحيحة
مهم ← لأن السطر الثالث مقدمته ١
ونتيجته صفر لذلك
المحاكمة المنطقية غير صحيحة.

قواعد الاستنتاج:

سنقدم فيما يلي بعض المحاكمات الأساسية الصحيحة التي تعتبر قواعد للاستنتاج وتفيدنا في تبسيط المحاكمات المنطقية وتسهل عملية التأكد من صحتها أو خطئها.

1- الجمع: $\dfrac{p}{\therefore p \vee q}$ ، $p \Rightarrow p \vee q$

2- الحذف: $\dfrac{p \wedge q}{\therefore p}$ ، $p \wedge q \Rightarrow p$ أو q

3- $\dfrac{p \quad q}{\therefore p \wedge q}$

4- $\dfrac{p \Rightarrow q \quad p}{\therefore q}$

5- $\dfrac{p \Rightarrow q \quad \sim q}{\therefore \sim p}$

6- $\dfrac{p \vee q \quad \sim q}{\therefore p}$ أو $\dfrac{p \vee q \quad \sim p}{\therefore q}$

7- $\dfrac{p \Rightarrow q \quad q \Rightarrow r}{\therefore p \Rightarrow r}$

الموضوع — التاريخ / / 201

8-
$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ r \Rightarrow s \\ \hline \therefore q \vee s \end{array}$$

مثال 1: باستخدام قواعد الاستنتاج أثبت صحة المحاكمات المنطقية الآتية:

$$\begin{array}{l} A \wedge (B \vee C) \\ \sim C \\ B \Rightarrow \sim A \\ \hline \therefore \sim A \end{array}$$

$A \wedge (B \vee C) \Rightarrow B \vee C$ حسب 2

$\left.\begin{array}{l} B \vee C \\ \sim C \end{array}\right\} \Rightarrow B$ حسب 6

$B \Rightarrow \sim A$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow B \\ B \Rightarrow \sim A \end{array}\right\} \Rightarrow \sim A$ حسب 6، حسب 4

والمحاكمة المنطقية صحيحة.

مثال 2: أثبت صحة المحاكمة التالية:

$$\begin{array}{l} p \vee q \Rightarrow s \\ s \Rightarrow r \\ \sim (r \vee q) \\ \hline \therefore \sim p \end{array}$$

$\left.\begin{array}{l} p \vee q \Rightarrow s \\ s \Rightarrow r \end{array}\right\} \Rightarrow p \vee q \Rightarrow r$ حسب 7

$\sim (r \vee q)$

$\left.\begin{array}{l} p \vee q \Rightarrow r \\ s \Rightarrow r \\ \sim (r \vee q) = \sim r \wedge \sim q \end{array}\right\} \overset{2}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{l} p \vee q \Rightarrow r \\ \sim r \end{array}\right\} \overset{5}{\Rightarrow} \sim (p \vee q)$

دي مورغان

$\overset{\text{دي مورغان}}{\Rightarrow} \sim p \wedge \sim q \} \overset{2}{\Rightarrow} \sim p$

أي المحاكمة صحيحة

الموضوع التاريخ / / 201

تمرين: عبر بالرموز عن المحاكمات التالية واختبر صحتها.

١- إذا رشح النائب نفسه لرئاسة المجلس فإنه سينتخب وإذا حضر النائب الاجتماع فإنه سيرشح نفسه لرئاسة المجلس وإما أن يحضر النائب الاجتماع أو أنه سيسافر إلى أوربا. ولكن النائب لا يمكن أن يسافر إلى أوربا إذن: النائب سينتخب رئيساً للمجلس.

الحل:

الفرضيات p: رشح النائب نفسه

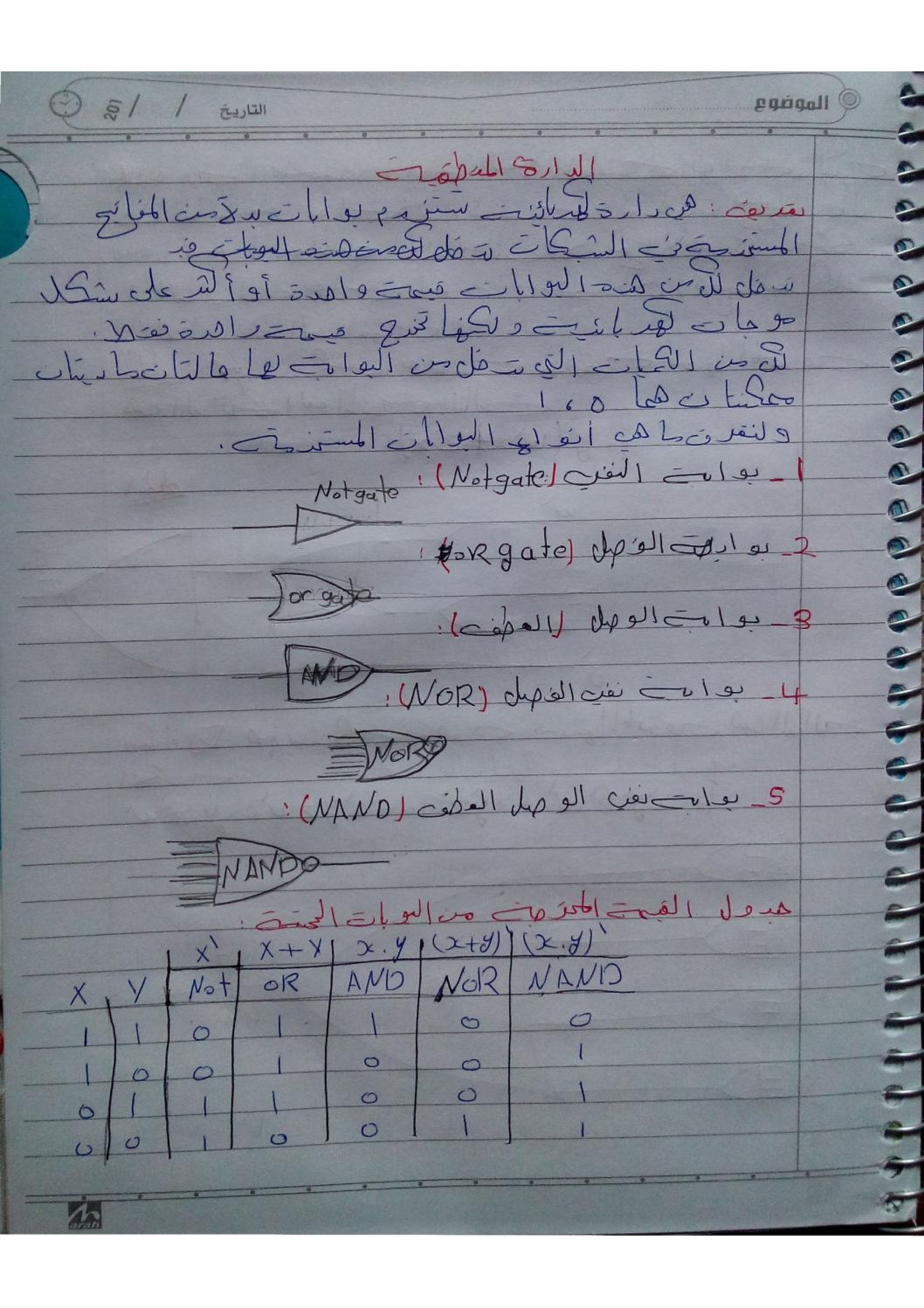
q: ينتخب النائب رئيساً للمجلس

r: حضر النائب الاجتماع

s: يسافر إلى أوربا

المعطيات:

$$p \Rightarrow q$$
$$r \Rightarrow p$$
$$r \vee s$$
$$\sim s$$
$$\therefore q$$



الدارة المنطقية

تعريف: هي دارة كهربائية تستخدم بوابات بدلاً من المفاتيح المستخدمة في الشبكات ~~تدخل لكل من هذه البوابات قد~~

تدخل لكل من هذه البوابات قيمة واحدة أو أكثر على شكل موجات كهربائية ولكنها تخرج قيمة واحدة فقط.

كل من الكميات التي تدخل من البوابة لها حالتان ثابتتان ممكنتان هما 0 ، 1

ولنتعرف ما هي أنواع البوابات المستخدمة.

1- بوابة النفي (Notgate):

Notgate

2- بوابة الفصل (ORgate):

or gate

3- بوابة الوصل (العطف):

AND

4- بوابة نفي الفصل (NOR):

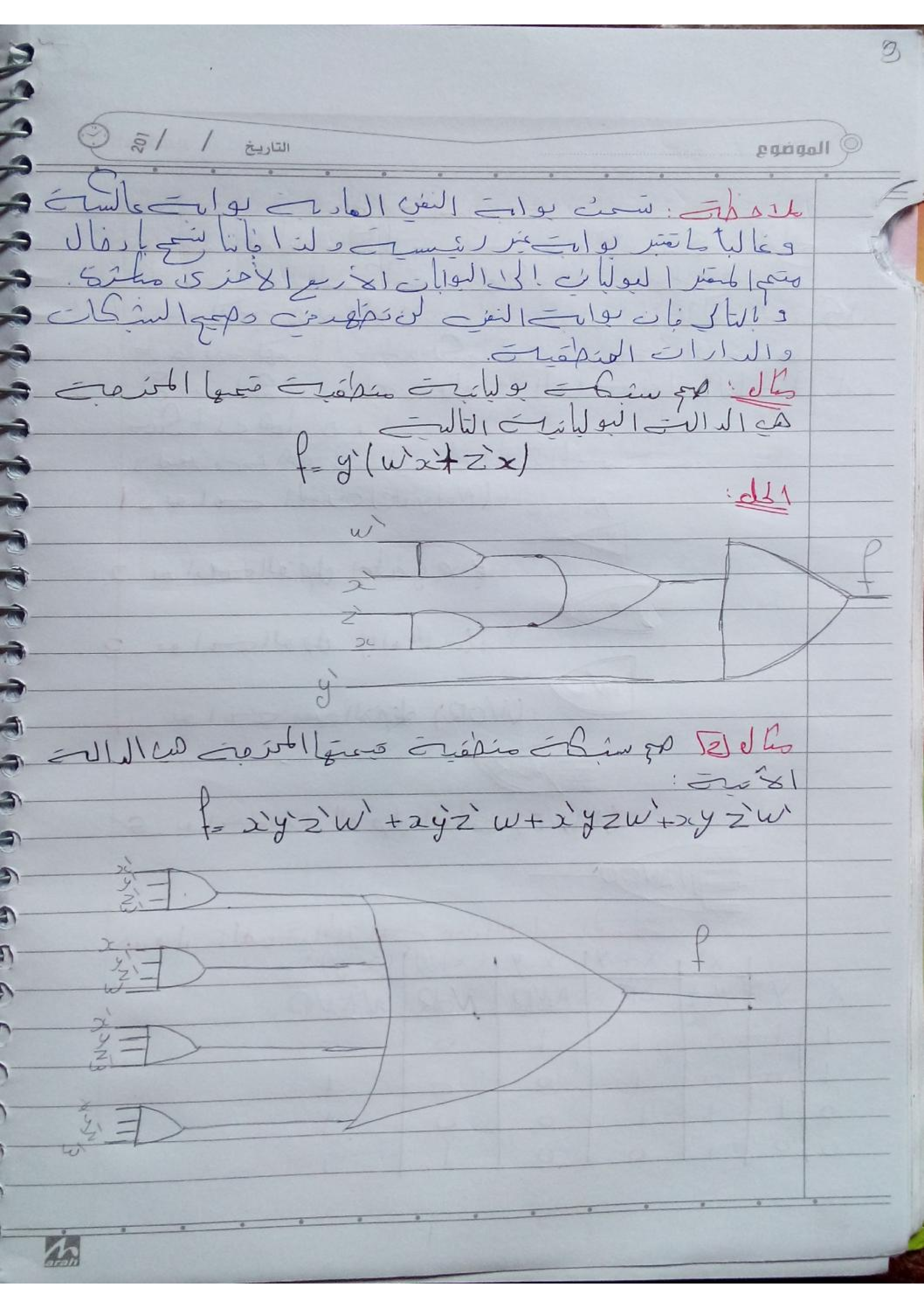
NOR

5- بوابة نفي الوصل العطف (NAND):

NAND

جدول القيم المترتبة من البوابات الخمسة:

		x'	x+y	x.y	(x+y)'	(x.y)'
X	Y	Not	OR	AND	NOR	NAND
1	1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	0	0	1
0	0	1	0	0	1	1



ملاحظة: تسمى بوابات النفي العادية بوابات عاكسة وغالبا ما تعتبر بوابات غير رئيسية ولذا فإننا نسمح بإدخال متمم المتغير البولياني إلى البوابات الأربع الأخرى مباشرة. وبالتالي فإن بوابات النفي لن تظهر في معظم الشبكات والدارات المنطقية.

مثال: صمم شبكة بوليانية منطقية قيمتها المخرجة هي الدالة البوليانية التالية

$$f = y'(w'x' + z'x)$$

الحل:

مثال (2) صمم شبكة منطقية قيمتها المخرجة هي الدالة الآتية:

$$f = x'y'z'w' + xy'z'w + x'yzw' + xyz'w'$$

إن أحد أهم أهداف تصميم الشبكات المنطقية هو تصميم شبكة بأقل تكاليف ممكنة أي شبكة تحتوي على أقل عدد ممكن من البوابات.

تعريف: إذا كانت f دالة بوليانية نقول عن شبكة منطقية أنها شبكة عطف وفصل أصغرية قيمتها المترجمة f إذا كانت تحتوي على أصغر عدد ممكن من بوابات العطف والفصل وكانت قيمتها المترجمة هي f

* خوارزمية:
إذا كانت f دالة بوليانية معطاة فإن الخطوات التالية تؤدي إلى تصميم شبكة عطف وفصل أصغرية قيمتها المترجمة هي f

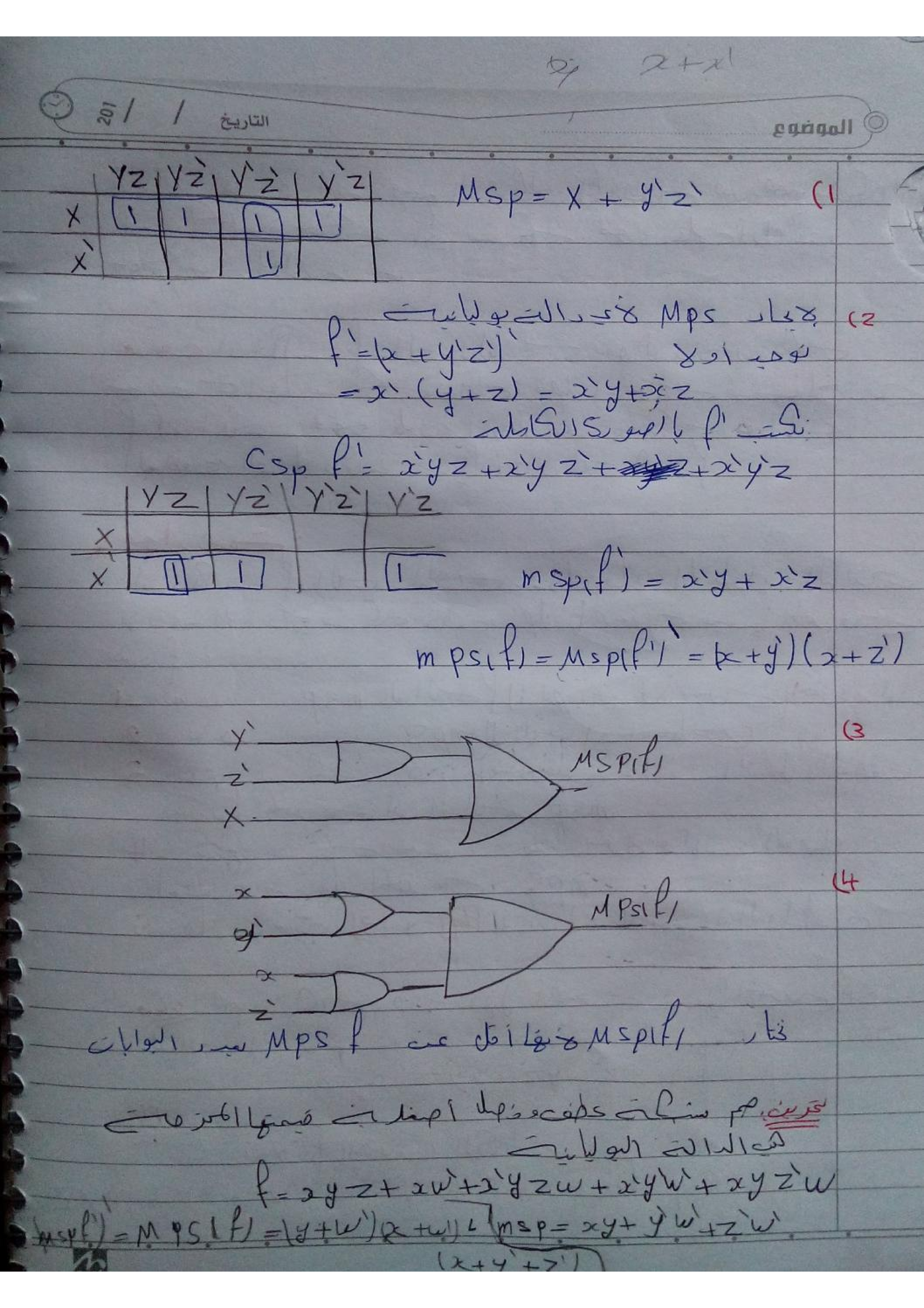
1- نوجد msp للدالة f (الصيغة الأصغرية) (مجموع جداءات)
2- نوجد mps للدالة (جداء مجاميع)
3- تصميم شبكة منطقية مستخدمين بوابات الوصل والعطف قيمتها المترجمة هي الدالة msp
4- تصميم شبكة منطقية مستخدمين بوابات الوصل والعطف قيمتها المترجمة mps
5- نقارن بين [3] و [4] نختار الأقل بعدد البوابات.

مثال: صمم شبكة عطف وفصل أصغرية قيمتها المترجمة هي الدالة البوليانية:

$$f = xyz' + y'z' + xy'z + xyz$$

الحل:
نكتب أولاً f بالصورة الكاملة

الصورة الكاملة $csp(f) = xyz' + xy'z' + x'y'z' + xy'z + xyz$



$x + x'$

1)

	yz	yz'	$y'z'$	$y'z$
x	1	1	1	1
x'			1	

$Msp = x + y'z'$

2) لإيجاد Mps لهذه الدالة البوليانية نوجد أولا

$f' = (x + y'z')' = x'.(y+z) = x'y + x'z$

نكتب f' بالصورة الكاملة

$Csp\ f' = x'yz + x'yz' + x'y'z$

	yz	yz'	$y'z'$	$y'z$
x				
x'	1	1		1

$msp(f') = x'y + x'z$

$mps(f) = Msp(f')' = (x+y')(x+z')$

3)

4)

نختار Msp(f) لأنها أقل من Mps f بعدد البوابات

تمرين: صمم شبكة دوائر منطقية بأقل عدد من المركبات للدالة البوليانية

$f = xyz + xw' + x'yzw + x'y'w' + xyz'w$

$msp(f') = Mps(f) = (y+w')(x+w)$ ، $msp = xy + y'w' + z'w'$

$(x+y'+z')$

بوابات نفي العطف أو نفي الفصل:

من أجل الحصول على شبكة نفي عطف أصغرية نتبع الخوارزمية التالية:

أ- نوجد $MSP(f)$

2- نضع الدالة f بالشكل $f=(f')'$

3- نضع الشبكة للخطوة (2) مستخدمين فقط بوابات نفي العطف

مثال: صمم شبكة نفي عطف أصغرية ذو خطوتين قيمتها المترجمة هي الدالة البوليانية:

$$f = xyz + xw' + x'yz'w' + x'y'w' + xyz'w$$

الحل:

1) نوجد $MSP(f)$

وجدنا أن $MSP(f)$:

$$MSP(f) = xy + y'w' + z'w'$$

2) $$f = (f')' = [(xy + y'w' + z'w')']'$$

نفي عطف

$$= [(xy)' . (y'w')' . (z'w')']'$$

صمم شبكة نفي فصل أصغرية قيمتها المترجمة هي الدالة البوليانية:

$$f = xyz + xw' + x'yz'w' + x'y'w' + xyz'w$$

ثم استنتج خوارزمية من أجل تصميم أي شبكة نفي فصل أصغرية قيمتها المترجمة f

نوجد Mps f

ثم $f = (f')'$

ونرسم الشبكة المطلوبة مستخدمين بوابات نفي الفصل

$$Mps(f) = (y + w')(x + w')(x + y' + z')$$

$$f = (f')' = [(y + w')(x + w')(x + y' + z')]'$$

$$= [(y + w')' + (x + w')' + (x + y' + z')']'$$

y
w'
x
w'
x
y'
z'
f

فصل وعطف أصغر بخطوتين
نفي عطف أصغر
نفي فصل = خطوات

تدريب: في كل من التمارين التالية من 1 ← 4 ارسم شبكة منطقية تمثيلها المنطقي هي الدالة المعطاة بحيث تكون

أ- شبكة عطف وفصل أصغرية

ب- شبكة نفي عطف أصغرية

جـ- شبكة نفي فصل أصغرية

1- $f = xyzw + xyz'w' + xy'zw' + x'y'z'w'$
$+ xy'z'w + x'y'zw$

2- $f = x'yz + x'y'z' + x'yz'$

3- $f = x'yz + xyz + xyz'$

4- $f = [x + (y + y'w)]' + x'yz'w'$

انتهى مقرر النظري ٢٠٢٣